

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

25 februarie 2023

Clasa a X-a

Subiecte:

1. a) Să se determine partea întreagă a numărului $\log_2 3 + \log_3 2$.
b) Să se compare numerele $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ și $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$.
2. a) Să se determine $x > 0$ dacă $x^{\sqrt{x}} \leq (\sqrt{x})^x$.
b) Să se determine $x > 0$ dacă $x^{\lg 5} + 12^{\lg x} = 13^{\lg x}$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 2^{-x}$.
a) Să se arate că f este inversabilă și să se determine inversa acesteia.
b) Să se determine x natural dacă $2^x - 2^{-x} = \log_2 \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)$.
4. Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$.
a) Arătați că dacă $z \in A$ atunci $\frac{2z-i}{2+iz} \in A$.
b) Arătați că dacă $1 + z \in A$ și $1 + z^2 \in A$, atunci $z \in A$.

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p

Timp de lucru 3 ore.